MIP Stat 1

marguerite.petittalamon@ensae.fr

December 2025

QCM

Bonne réponse: +1 sinon -0.5. Réponses: D, A, B, C.

Questions de cours: 2+2+1

1. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i := \bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \bar{X}_n) := S_n^2 \sim \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}$, $\bar{X}_n \perp\!\!\!\perp S_n^2$.

2. $\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}$, $n\hat{F}_n(t) \sim \mathrm{Bin}\big(n, F(t)\big)$

3. $P_\theta = P_{\theta'} \;\Rightarrow\; \theta = \theta'$

Exercice 1: 2+2+1+2+2

1. $\mathbb{E}[X_i] = 3\theta$, $\hat{\theta}_n^{MM} = \frac{\bar{X}_n}{3}$

2. $R(\theta, \hat{\theta}_n^{MM}) = \frac{\theta^2}{3n}$.

3. X_i i.i.d de moment d'ordre 1 fini, LFGN: $\hat{\theta}_n^{MM} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta$

4. X_i i.i.d de moment d'ordre 2 fini, TCL: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 3\theta) \to \mathcal{N}\big(0, 3\theta^2\big)$. Par linéarité, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MM} - \theta) = \frac{1}{3}\sqrt{n}(\bar{X}_n - 3\theta) \to \mathcal{N}\Big(0, \frac{\theta^2}{3}\Big)$. (Ou delta-méthode avec $g(x) = x/3, g \in C^1(\mathbb{R})$ et $g'(x) = 1/3$)

5. $T_\theta(x) = \frac{x}{\theta}$ est croissante de $[0,\infty) \to [0,\infty)$ et $T_\theta(X) \sim \Gamma(3,1)$ ne dépend pas de θ. (d'autres choix de transformations vérifiant ces propriétés étaient correctes).

Problème: 3

On considère $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$, $\mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n] = \theta, \mathrm{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{n}$, $\mathbb{E}_\theta\big[(\bar{X}_n - \theta)^2\big] = \mathrm{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{n}$ (0.25/1 si risque calculé). Considerons $\tilde{\theta}_n = c\,\bar{X}_n, \mathbb{E}_\theta[\tilde{\theta}_n] = c\theta, \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta}_n) = \frac{c^2\theta^2}{n}, \mathbb{E}_\theta\Big[(\tilde{\theta}_n - \theta)^2\Big] = \theta^2\Big(\frac{c^2}{n} + (1-c)^2\Big)$. Avec $c = \frac{n}{n+1}$, on a $\mathbb{E}_\theta\Big[(\tilde{\theta}_n - \theta)^2\Big] < \mathbb{E}_\theta\big[(\bar{\theta}_n - \theta)^2\big] \quad \forall\,\theta > 0$. Donc $\bar{\theta}_n$ inadmissible.

Note importante

Les éléments de réponse ci-dessus sont donnés sans justification. Lors d'un examen, il faut justifier les réponses, énoncer clairement les arguments, et citer les théorèmes utilisés. Par ailleurs, ce corrigé peut contenir des coquilles ou imprécisions ; n'hésitez pas à les signaler.